

Abb. 2. Registrierung der Gesamtteilchenanzahl aller drei Zählrohlagen während der Zeit des Anstieges der Kosmischen Strahlung.

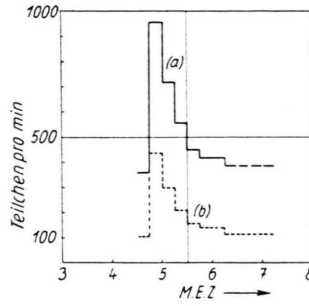


Abb. 3. Berechneter Effekt für Teilchen großer Reichweite (a) und für Teilchen kleiner Reichweite (b).

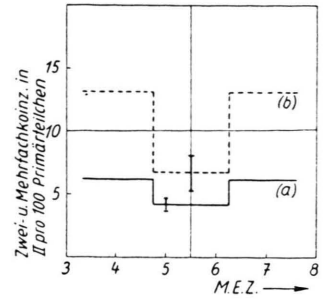


Abb. 4. Mittlere Anzahl der Zwei- und Mehrfachkoinzidenzen während der Zeit der merklichen Intensitätserhöhung von Teilchen großer Reichweite (a), von Teilchen kleiner Reichweite (b).

Reichweite (im wesentlichen Elektronen) durch Koinzidenzen ausgesondert. Von diesen beiden Teilchensorten wurden nur die Tagesmittelwerte registriert. Diese Tagesmittelwerte sind in Tab. 1 zusammengestellt, und zwar sind in der ersten Spalte die während der Zeit vom 22. Februar 12.41 Uhr bis zum 23. Februar 13.22 Uhr gemessenen Werte, in der zweiten Spalte die vorher und nachher gemessenen Normalwerte angegeben:

	Tagesmittel am 23. 2. 56	Tagesmittel normal
Teilchen großer Reichweite pro min:	375.2	360,0
Teilchen kleiner Reichweite pro min:	115.2	107,0
Zwei- und Mehrfachkoinzidenzen in der Lage II pro 100 Teilchen großer Reichweite (vor allem knock on's)	5,88	6,00
Zwei- und Mehrfachkoinzidenzen pro 100 Teilchen kleiner Reichweite in der Lage II	12,71	13,07

Tab. 1.

Setzt man für beide Teilchensorten näherungsweise den gleichen zeitlichen Verlauf voraus wie für die Gesamtintensität (vgl. Abb. 2), so erhält man die in

Abb. 3 dargestellten Ergebnisse. In Abb. 4 sind schließlich die mittleren Ausbeuten an Zwei- und Mehrfachkoinzidenzen in der Zählrohlage II für beide Teilchensorten während der Zeit der merklichen Intensitätserhöhung angegeben und zum Vergleich die vorher und nachher vorhandenen normalen Werte.

Die Anzahl der Zwei- und Mehrfachkoinzidenzen pro 100 Primärteilchen sinkt also bei den Teilchen großer Reichweite um etwa 32% und bei den Teilchen kleiner Reichweite um etwa 50%. Da bei den Teilchen großer Reichweite keine Elektronen mitregistriert werden, folgt daraus unabhängig von der Zusammensetzung der zusätzlichen Strahlung während dieser Zeit, daß ihre mittlere Energie merklich abgesunken ist, denn aus der relativistischen Stoßgleichung ergibt sich ein gleichsinnig mit der Energie des Primärteilchens abfallender Anteil an Sekundärelektronen. Entsprechend fällt auch der Anstieg in der Anzahl der Impulse von den Zählrohlagen I, II und III relativ zum berechneten Anstieg der alle drei Zählrohlagen passierenden Teilchen großer Reichweite zu klein aus. Wegen der geringen Energie der zusätzlichen Strahlung wirken nämlich die Institutswände und die seitliche 5 cm starke Bleiabschirmung stärker richtungsausblendend als bei der normalen Kosmischen Strahlung. Bei dieser Schlußweise ist eine konstante Richtungsverteilung der einfallenden Strahlung auch während der Zeit der Intensitätserhöhung vorausgesetzt worden.

### Lösung eines Neutronentransportproblems mit der Monte-Carlo-Methode

VON TASSO SPRINGER

Laboratorium für Technische Physik der TH München  
(Z. Naturforschg. 12 a, 514—516 [1957]; eingegangen am 6. Mai 1957)

Es wurde der mittlere Energieverlust schneller Neutronen durch unelastische Stöße in Schwermetallen bestimmt. Dies geschah aus der Messung des FERMİ-Alters,

worauf wir hier nicht eingehen werden. Die Neutronenquelle befand sich im Zentrum einer Kugel aus dem zu untersuchenden Material; ihr Radius lag in der Größenordnung der freien Streuweglänge. Um ein von der Geometrie der Meßanordnung unabhängiges Maß für die unelastischen Abbremsseigenschaften des Materials zu finden, benötigt man die Wahrscheinlichkeiten  $n(0), n(1), n(2), \dots, n(i)$  dafür, daß ein Neutron die Kugel ohne einen Stoß, nach einem, zwei,  $\dots, i$  Stößen verläßt. Aus diesen zu errechnenden  $n(i)$  und aus dem gemessenen gesamten mittleren Energieverlust



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

kann man dann Aussagen über den mittleren Energieverlust bei einem einfachen Stoß, einem zweifachen Stoß usw. machen, sofern man mehrere Messungen mit dem gleichen Material bei verschiedenen Geometrien durchführt (verschiedene Kugelradien bzw. verschiedene Dichten auf heterogener Grundlage).

Die Ermittlung der Stoßzahlwahrscheinlichkeiten  $n(i)$  erfolgte mit Hilfe einer elektronischen Rechenmaschine<sup>1</sup> nach einem statistischen Modell (Monte-Carlo-Methode)<sup>2</sup>, indem man eine Vielzahl  $N_t$  von Neutronenschicksalen einzeln durchspielte und auszählte, wie groß die Anzahlen  $N(i)$  der Neutronen sind, welche die Kugel gerade nach  $i$  Stößen verlassen. Dann ist  $n(i) = N(i)/N_t$ . Die Neutronenpfade in der Kugel werden unter folgender vereinfachenden Annahme berechnet: Es sind nur 14 diskrete Neutronenflugrichtungen zugelassen, nämlich 6 in den Achsenrichtungen eines kartesischen Koordinatensystems und 8 in dessen kubischen Diagonalrichtungen<sup>3</sup>. Die Fortbewegung erfolgt in Schritten einer (statistisch verteilten) Länge  $s$ , die den Abstand zwischen zwei Stoßsorten angibt. Die Ortskoordinaten  $(x, y, z)$  des Neutrons sind in der Maschine gespeichert; ein Schritt in der  $+x$ -Richtung verlangt dann z. B. von der Maschine die Addition  $x+s$ ,  $y+0$ ,  $z+0$ , Schritte in den Diagonalrichtungen  $x \pm s/\sqrt{3}$ ,  $y \pm s/\sqrt{3}$ ,  $z \pm s/\sqrt{3}$ . Die Strecke  $s$  wird von Stoß zu Stoß folgendermaßen festgelegt: Die Maschine erzeugt für jeden Stoß eine Zufallszahl  $a$ . Die Zahlen  $a$  sollen im Intervall zwischen 0 und 1 statistisch gleich verteilt sein. Man bildet nun aus den Zahlen  $a$  die Größen  $a' = -\lambda \ln a$ , wobei  $\lambda$  die freie Streuweglänge der Neutronen bedeutet. Diese  $a'$  sind dann wegen  $-da = e^{-a'/\lambda} da'/\lambda$  wie  $e^{-a'/\lambda}$  verteilt. Da die Wahrscheinlichkeit für ein Neutron, eine Strecke  $s$  ohne Stoß zu durchlaufen, gerade  $e^{-s/\lambda}$  beträgt, können wir jetzt  $a'$  direkt mit diesem  $s$  identifizieren, d. h. die Schrittweite ist jeweils  $-\lambda \ln a$ . Nach deren Bestimmung in der beschriebenen Weise vollzieht die Maschine eine Fallunterscheidung nach Maßgabe einer weiteren Zufallszahl, die angibt, in welcher Richtung das Neutron weiterfliegen soll. Hierzu ist innerhalb des Zahlenbereichs von 0 bis 1 jeder der 14 Richtungen ein Diskriminationsintervall zugeordnet, dessen Breite der zugehörigen Flugwahrscheinlichkeit proportional ist. Die Auswahl der Flugrichtung erfolgt dann durch die Feststellung, in welchem Intervall die Zufallszahl jeweils liegt. Ferner wird bei jedem Stoß in einer Zählzelle um eine Einheit weitergezählt: Der Inhalt ( $Z$ ) dieser Zelle gibt nach Austritt des Neutrons aus der Kugel die Gesamtzahl der Stöße des betreffenden Neutrons an. Nach jedem Schritt wird weiterhin festgestellt, ob sich das Neutron noch innerhalb der Kugel befindet (Prüfung des Vorzeichens von  $x^2 + y^2 + z^2 - R^2$ ). Ist

dies der Fall, so läuft der Vorgang weiter. Andernfalls werden für das nächste Neutron die Ortskoordinaten wieder null gesetzt (Quelle im Ursprung); ferner wird die Größe  $Z$ , die Stoßzahl pro Neutron, festgestellt und, je nachdem  $Z=0, 1, 2, \dots$  ist, der Inhalt der Zählzelle für die Größe  $N(0)$  bzw.  $N(1)$  bzw.  $N(2), \dots$  um eine Einheit weitergezählt, desgleichen die Gesamtzahl der durchgespielten Neutronen. Die  $N(i)$  werden nach Durchgang von je 1000 Neutronen von  $i=0$  bis  $i=10$  ausgedruckt.

Die Erzeugung der Zufallszahlen<sup>4</sup>  $a_n$  geschieht durch die Vorschrift  $a_{n+1} = a_n k \bmod 2^m$ ,  $a_n = a_n 2^{-m}$ , wobei aus technischen Gründen  $m=40$  gewählt wurde, da die PERM als 40-stellige Maschine notwendig modulo  $2^{40}$  rechnet. Eine gute statistische Verteilung erzielt man mit einem  $k$  und  $a_0$  von der Form<sup>5</sup>  $8z-3$ . Die aus diesem Bildungsgesetz gewonnene Folge von „Zufallszahlen“, die man besser als Pseudozufallszahlen bezeichnet, hat eine Periodenlänge von  $2^{40} \approx 10^{12}$  Zahlen, von denen wir stets höchstens die ersten  $10^4$  verbrauchten. Dieser Teil der Zahlenfolge wurde zwei Testen unterworfen, um zu prüfen, ob die Folge die Forderung nach Zufälligkeit in den Punkten erfüllt, auf die es hier ankommt. (1) Wenn die  $a'$  in ihrer Häufigkeit wie  $e^{-a'/\lambda}$  verteilt sind, dann muß notwendig  $n(0) = e^{-R/\lambda}$  sein. Dies war im Rahmen der statistischen Schwankungen hinreichend gut erfüllt. Damit ist die Richtigkeit der räumlichen Verteilung der Orte der 1. und höheren Stöße sichergestellt. (2) Es wurde untersucht, ob Korrelationen bezüglich der Größe der Zufallszahl zwischen mehreren konsekutiven Zufallszahlen beständen. Solche könnten z. B. die Auswirkung haben, daß Stöße mit großer freier Weglänge bevorzugt hintereinander auftreten, und (da die Verteilung der  $a'$  richtig sein soll) andererseits Stöße mit kleiner freier Weglänge ebenfalls bevorzugt gehäuft auftreten. Es wurde durch Auszählen eine Verteilungsfunktion  $W(Z, i)$  bestimmt, welche angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit in aufeinanderfolgenden Gruppen zu je  $Z$  Zufallszahlen eine Zufallszahl gerade  $i$ -mal in einem vorgeschriebenen Zahlenintervall (z. B.  $0,9 \leq a \leq 1,0$ ) zu liegen kommt. Bei Korrelationsfreiheit muß  $W(Z, i)$  gemäß

$$W(Z, i) = \binom{Z}{i} \left( \frac{p}{1-p} \right)^i (1-p)^Z$$

verteilt sein.  $p$  ist die a-priori-Wahrscheinlichkeit des vorgeschriebenen Intervalls. Es wurden die Fälle  $Z=4$  und  $Z=8$  untersucht (längere Folgen von Zufallszahlen für ein Neutronenschicksal waren für uns praktisch ohne Bedeutung). Die Abweichungen der ausgezählten Verteilung von deren oben angegebenen Erwartungs-

<sup>1</sup> Die Berechnung erfolgte auf der programmgesteuerten Elektronischen Rechenmaschine München („PERM“) der Technischen Hochschule.

<sup>2</sup> Veröffentlichungen über Anwendungen mit der Monte-Carlo-Methode: J. M. THARRATS, I. M. LÓPEZ ROCA u. H. CLIMENT, *Anales de Física y Química A* **50**, 107 [1954]; I. CRONE, *Fortschr. Phys.* **3**, 97 [1955]; J. F. PERKINS, *J. Appl. Phys.* **26**, 655 und 1372 [1956]; J. v. NEUMANN et al.,

*Nat. Bur. Stand., Washington* 1951; R. D. RICHTMYER, *NYO-6479* [1955].

<sup>3</sup> Ursprünglich wurde auch die Bewegung in diskreten Schritten beschrieben. Diese Vereinfachung haben wir mittlerweile verlassen.

<sup>4</sup> S. v. HOERNER, *Z. angew. Math. Phys.* **8**, 26 [1957].

<sup>5</sup> Dr. F. BAUER, persönliche Mitteilung.

wert  $W(Z, i)$  lagen wieder im Rahmen der statistischen Schwankung.

Die Monte-Carlo-Methode benötigt naturgemäß sehr hohe Rechenzeiten. Da die Streuwinkelverteilungen notwendig an der Richtung des ankommenden Neutrons, die 14 Bewegungstypen jedoch am raumfesten Koordinatensystem orientiert sind, muß vor jedem Stoß eine Koordinatentransformation vorgenommen werden. Um die Rechnung damit nicht zu belasten, wurde diese für alle vorkommenden 14 Flugrichtungen explizit durchgeführt und für jede Richtung ein eigenes Diskriminationsschema programmiert. Dadurch wird zwar das Programm umfangreicher; an Rechenzeit spart man jedoch erheblich ein. Wir wollen nun eine Abschätzung der Rechenzeit geben, wozu wir als Standard-

gestellt. Es wurden folgende differentielle Streuquerschnitte zugrunde gelegt: (1) Isotrope Streuung; (2) starke Vorwärtsstreuung unter Zugrundelegung der Streuung von 4,1 MeV-Neutronen an Pb<sup>6</sup>; (3) wie (1), aber mit nur 7 statt 14 Flugrichtungen. Es war jeweils  $N_t = 1000$  oder 2000 gewählt worden. Ein Vergleich mit den jüngst von BETHE u. a.<sup>7</sup> für den isotropen Fall angegebenen (analytisch gefundenen)  $n(1)$ -Werten zeigt, daß bis  $R/\lambda = 0,4$  im Rahmen unserer Genauigkeit Übereinstimmung herrscht; für wachsendes  $R/\lambda$  ergibt sich indessen eine zunehmende Abweichung von unseren Werten nach oben (für  $R/\lambda = 1,2$  etwa 15%). Es ist denkbar, daß diese noch aufzuklärende Diskrepanz von der diskreten Flugrichtungsverteilung herrührt.

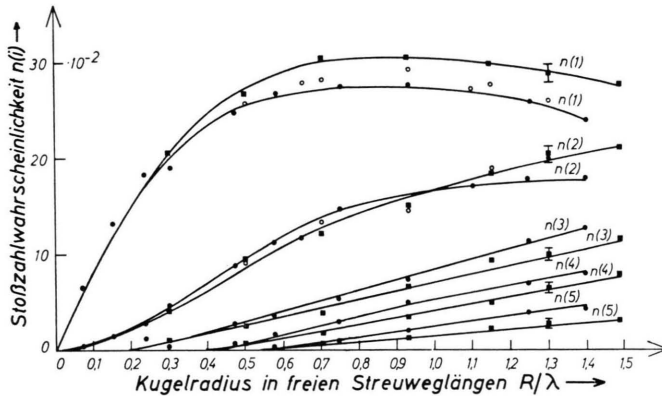


Abb. 1. Wahrscheinlichkeit  $n(i)$  für einen  $i$ -fach-Stoß in der Kugel.  
 $R$  = Kugelradius,  
 $\lambda$  = freie Streuweglänge,  
 ● = isotrope Streuung,  
 ■ = Vorwärtsstreuung (für 4,1-MeV-Neutronen),  
 ○ =  $n(1)$  und  $n(2)$  für isotrope Streuung bei nur 7 Flugrichtungen.

Rechenzeit (Taktzeit TZ) für eine Operation auf der PERM vorläufig 4 ms zugrunde legen müssen: Man benötigt (1) zum Weiterzählen von  $x, y, z$  im Mittel 6 TZ; (2) für die Fallunterscheidung  $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \leq 0$  und das Weiterzählen der  $N(i)$  12 TZ; (3) für die Herstellung der 2 Zufallszahlen 5 TZ; (4) für die Berechnung von  $\lambda \ln a$  etwa 20 TZ und (5) für die Flugrichtungsdiskrimination im Mittel etwa 17 TZ. Die Summe für einen Stoßvorgang beträgt demnach 60 TZ oder 0,24 s. Nehmen wir für den Fall, der Kugelradius  $R$  sei ungefähr gleich  $\lambda$ , im Mittel zwei Stöße je Neutron an (Emission des Neutrons aus der Quelle zählt wie ein Stoßvorgang), dann wird die Rechenzeit pro Neutronenschicksal 0,48 s. Um einen mittleren statistischen Fehler von wenigen Prozent in den  $N(i)$  zu erzielen, braucht man etwa 2000 Neutronen und damit im vorliegenden Fall ein Rechenzeit von 16 min.

Ergebnisse für die Stoßzahlwahrscheinlichkeiten  $n(i)$  sind in Abb. 1 als Funktion des Verhältnisses  $R/\lambda$  dar-

Wir weisen darauf hin, daß das Verfahren nicht nur für beliebige Streuwinkelverteilungen verwendbar ist, sondern auch für beliebig vorgegebene komplizierte Geometrien. Man muß dazu nur die Fallunterscheidung  $x^2 + y^2 + z^2 - R \leq 0$  durch eine entsprechende andere ersetzen. Die Ermittlung des Energiespektrums der die Kugel verlassenden Neutronen bei gegebenen Term-Energien und -Anregungswahrscheinlichkeiten für unelastische Stöße soll mit einem zusätzlichen Monte-Carlo-Programm untersucht werden.

Ich danke Herrn Prof. H. MAIER-LEIBNITZ für die Anregung und Förderung dieser Arbeit; weiterhin gilt mein Dank Herrn Prof. R. SAUER und Herrn Prof. H. PILOTY, die mir die Benützung der PERM ermöglichten, ferner den Angehörigen des Rechenzentrums, insbesondere den Herren Dr. SAMELSON, Dr. F. BAUER, Dr. URICH und Dipl.-Ing. ANACKER für ihre hilfreiche Unterstützung.

<sup>6</sup> M. WALT u. J. R. BEYSTER, Phys. Rev. **98**, 677 [1955].

<sup>7</sup> H. A. BETHE, J. R. BEYSTER u. R. E. CARTER, J. Nucl. En. **3**, 207 und 273 [1956].